

## סטטיסטיקה והסתברות

פרק 49 - רוח סマー לתוחלת (מומוצע)

### תוכן העניינים

- |   |   |
|---|---|
| 1 | . רוח סマー כשינוי האוכלוסייה ידועה.....    |
| 6 | . קביעת גודל מוגם .....                   |
| 8 | . רוח סマー כשינוי האוכלוסייה לא ידועה..... |

## רוח סמך כשינוי האוכלוסייה ידועה:

**רקע:**

ממוצע המדגם הוא אומד ממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שסכום המדגם יהיה בדיקות כמו הממוצע האמתי הוא אפסי.

מה שנחוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רוח סמך.

בנייה מרווה בטחון שהסיכוי שהפרט  $\mu$  ייכל בתוכו הוא:  $\alpha - 1$ .

$\alpha - 1$  : נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש:  $\alpha - 1 = P(A \leq \mu \leq B)$ .

A - גבול תחתון של רוח הסמך.

B - הגבול העליון של רוח הסמך.

$L = B - A$  - אורך רוח הסמך.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

חווקר דגם 25 חיילים שנבחנו ב מבחון הפסיכומטרי. הוא בנה רוח סמך ממוצע הציונים ב מבחון הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים ו קיבל בין 510 ל-590. רוח הסמך בונה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?
2. מה המשתנה באוכלוסייה?
3. מה הפרט שהחווקר רצה לאמוד?
4. מהו רוח הסמך?
5. מה אורך רוח הסמך?
6. מהי רמת הביטחון של רוח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רוח סמך לתוחלת ( $\mu$ ) במקהה ש- $\sigma^2$  (שונות האוכלוסייה) ידועה. פרמטרו אותו נרצה לאמוד:  $\mu$ .

אומד נקודתי:  $\bar{x}$ .

תנאים לבניית רוח הסמך:  $N \sim X$  או  $n \geq 30$ .

$\sigma^2$  (שונות האוכלוסייה) ידועה.

$$\text{נוסחה לרוח הסמך: } \bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

#### דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נציגו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

$$\text{שגיאת האמידה המקסימלית: } \varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ע - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרה גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

#### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשימוש לשאלת עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברוח הסמך:

- אורך רוח הסמך הוא פערם שגיאת האמידה המקסימלית:  $L = 2\varepsilon$ .
- ממוצע המדגים נופל תמיד באמצע רוח הסמך:  $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$ .
- ככל שמספר התצפיות ( $n$ ) גבוהה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן מקבל רוח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון ( $\alpha-1$ ) גבוהה יותר, כך:  $\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  יותר גבוהה, ורוח הסמך יותר ארוך.

**שאלות:**

- 1)** חוקר התענין למד את השכר המומוצע במשק. על סמך מוגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר המומוצע במשק נع בין 9200 ל-9800 ₪.
- מי האוכלוסייה במחקר?
  - מה המשנה הנחקר?
  - מה הפרמטר שאותו רוצים למד?
  - מה רוח הסמך לפרמטר?
  - מה רמת הסמך לפרמטר?
  - מה אורך רוח הסמך?
  - מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
- 2)** מעוניינים למד את התפוקה היומית המומוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. בדוגמאות אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שטית התקן האמצעית ידועה ושויה 150 מוצרים ביום. בנו את רוח הסמך.
- 3)** מעוניינים למד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרך ידוע שאורך החיים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 שעות. נגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
- בנו רוח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים המומוצע של מכשיר.
  - בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים המומוצע של מכשיר.
  - הסבירו כיצד ומדוע השתנה רוח הסמך.
- 4)** נגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר המומוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שטית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
- בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
  - מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המוגם לתוחלת השכר?
  - מה היה צריך להיות גודל המוגם אם היו רוצחים להקטין את רוח הסמך ב-50%?
  - אם היינו מגדילים את גודל המוגם ובונים רוח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרוח הסמך מכיל את הפרמטר?

- 5) בנו רוח סמך לממוצע הציוניים של מבחן אינטלייגנציה. ידוע שסטיטית התקן היא 15 והמדד מtabסס על 100 תוצאות. רוח הסמך שהתקבל הוא (105,99).  
שחורו את :
- א. ממוצע המדגמים.
  - ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.
  - ג. רמת הסמך.
- 6) זמן החלה מאנגינה מתפלג עם סטיטית התקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.  
 א. בנו רוח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
- ב. מה הייתה קורה לאורך רוח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגמים פי 4? הסבירו.
- ג. מה הייתה קורה לאורך רוח הסמך אם היו בונים את רוח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
- 7) חוקר בנה רוח סמך לממוצע וקיבל את רוח הסמך הבא :  $\mu = 82$ .  
 נתון שסטיטית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדד מtabסס על 16 תוצאות. התפלגות המשתנה היא נורמללית.  
 א. מהו ממוצע המדגמים?  
 ב. מהי רמת הסמך של רוח הסמך שנבנה?  
 ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?
- 8) חוקר בנה רוח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותו נתונים רוח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.  
 א. אורך רוח הסמך החדש יהיה קטן יותר.  
 ב. גודל המדגמים יהיה כעת קטן יותר.  
 ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצota רוח הסמך יהיה קטנים יותר ב佗וח הסמך החדש.  
 ד. רמת הביטחון לבנות רוח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

**9)** חוקר בנה רוח סמך ל-  $\mu$  וקיבל:  $48 < \mu < 54$ . מה נכון בהכרח:

- א.  $\mu = 51$ .
- ב.  $\bar{X} = 6$ .
- ג.  $\bar{X} = 51$ .
- ד. אורך רוח הסמך הינו 3.

**10)** אייזה מהגורםים הבאים אינו משפיע על גודלו של רוח בר סמך, כאשר שונות האוכולוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. רמת הביטחון.
- ב. סטיית התקן באוכולוסייה.
- ג. מספר המשתתפים.
- ד. סטיית התקן במדגם.

### תשובות סופיות:

- (1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-₪. 600. ה. 0.95. ג.  $\mu$ . 9200  $< \mu < 9800$ . ד. 0.05.
- (2) .4920.6  $< \mu < 4979.4$
- (3) א. 223.42  $< \mu < 236.58$ . ב. 222.16  $< \mu < 237.84$ . ג. ראה סרטוון.
- (4) א. 9284  $< \mu > 10,116$ . ב. הסטיה המרבית בין  $\bar{x}$  ל-  $\mu$  היא 416 נס בביטחון של 95%.
- (5) א. 0.102. ב. 0.3. ג. לא. ד. 0.800.
- (6) א. 4.42  $< \mu < 4.83$ . ב. יקטן פי 2. ג. גדול.
- (7) א. 0.87. ב. 0.5. ג. 0.9544. ד. 0.9544.
- (8) ב'. ג'.
- (9) ג'.
- (10) ד'.

## קביעת גודל מוגן:

**רקע:**

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיטית התקן של האוכלוסייה ידועה:  $\sigma$  ברמת סמך של  $\alpha=1$  ושיגיאת אמידה שלא עלתה על  $\epsilon$  מסויים, נציב

$$n \geq \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\epsilon} \right)^2$$

בנוסחה הבאה:

כדי להציג בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר يتפלג נורמלית או שהמוגן ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמללית עם סטיטית התקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדוגם אם מעוניינים שבבביחוון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המוגן לממוצע האמתי לא עליה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

**שאלות:**

- (1)** משתנה מקרי מתפלג נורמללית עם סטיטית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רוח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא עולה על 2?
- (2)** מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבאי. מעוניינים שבביחוון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5. נניח שהדופק מתפלג נורמלית על סטיטית תקן של 3 פעימות לדקה.
- כמה מתגייסים יש לדוגום?
  - אם ניקח מדגם הגדל פי 4 מהמדד של סעיף א' ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפייע על שגיאת האמידה?
- (3)** יהיו  $X$  משתנה מקרי עם ממוצע  $\mu$  וסטיטית תקן  $\sigma$ . חוקר רוצה לבנות רוח בר סמך ל- $\mu$  ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרוח יהיה  $\sigma = 0.5$ . מהו גודל המדגם הנדרש?

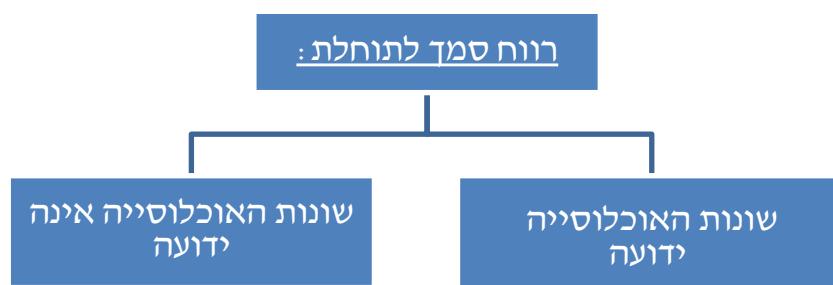
**תשובות סופיות:**

- (1) .780  
 (2) א. 139.  
 (3) .  $n = 62$
- ב. הדבר יקטין את  $\sigma$  פי 2.

## רוח סמך כשינויות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

בבואהנו לבנות רוח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני הממצבים הבאים:

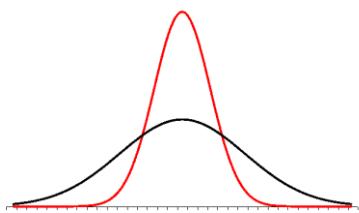


בפרק זה עוסק במקרה ששינויות האוכלוסייה  $(\sigma^2)$  אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטני.

התנאי:  $N \sim X$  או שהמדגם גדול.

$$\text{רוח סמך: } \bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$



$$\text{האומד לשונות: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית בעומוניות שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכון הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויות במושג שנקרו דרגות החופש. דרגות החופש הן:  $df = n - 1$ .

כל שדרגות החופש עלות התפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

שדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הזמן שלוקח לפתרון שאלה מסוימת ביחסו מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמלית.

במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגומו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות

שהתקבלו בדקות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3.

בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% למומוצע זמן הפתרון לשאלת קרב תלמידי כיתה ח'.

**שאלות:**

- 1)** מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב.  
ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה : 84, 84, 88, 79, 89.  
הערה : לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמלית בקירוב.  
א. בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הניל.  
ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?  
ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רוח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רוח הסמך?
- 2)** במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חיל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן :  $S = 13$  ס"מ.  
בנו רוח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?
- 3)** אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסעה בהם בבדיקות הוא : 27, 34, 32, 40, 30.  
א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסעה הממוצע. מהי ההנחה הדורשahn לorzuch פתרון?  
ב. איך גודל רוח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?
- 4)** ציוני מבחן אינטיליגנציה מתפלגים נורמלית. נדגו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.  
א. בנו רוח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.  
ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.  
ג. הסבירו את ההבדלים בין שני השעיפים הניל.
- 5)** נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבועות-40 של החירון. המשקל נמדד בKİLOGRAMS. להלן התוצאות שהתקבלו :  $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$  ,  $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$ .  
בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היולדו.

- 6) נדגו 120 אנשים אקראים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו :  $S = 2$  ,  $\bar{x} = 13.8$  .  
בנו רוח סמך ברמת סמך של 96% למומוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.
- 7) שני סטטיסטיקים בנו רוח בר-סמך לאותו פרמטר  $\mu$  .  
 לכל אחד מהסטטיסטיקים מוגם אחר, אך באותו גודל 10.  
 שניהם קבעו אותה רמת סמך.  
 סטטיסטיκי א : הניח  $20 = \sigma$  .  
 סטטיסטיκי ב : חישב לפי המוגם וקיבל  $20 = S$  .  
 למי משני הסטטיסטיקים יהיה רוח סמך ארוך יותר?  
 א. סטטיסטיκי א.  
 ב. סטטיסטיκי ב.  
 ג. אותו ארוך רוח סמך לשני הסטטיסטיקים.  
 ד. תלוי בתוצאות המוגם של כל סטטיסטיκי.
- 8) נתון ש :  $N(\mu, \sigma^2)$  ביצעו מוגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מוגמית 10.  
 אורך רוח הסמך שהתקבל הוא : 8.765. מהי רמת הביטחון של רוח הסמך?

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $\mu < 89.72$       ב.  $\mu > 79.88$   
ג. הוא היה גדול.      ב. כן.  
 (2) ראה בסרטון.
- (3) א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית.  
 ב. לא ניתן לדעת.
- (4) א.  $\mu < 107.37$       ב.  $\mu > 107.37$       ג. ראה בסרטון.  
 (5)  $.96.63 < \mu < 3.351$   
 (6)  $.3.149 < \mu < 14.18$
- (7) ב'.  
 (8) 90%